Elementos almacenadores de energía

Se van a analizar circuitos con fuentes, resistencias y elementos almacenadores de energía (bobinas y condensadores). Se van a tener ecuaciones diferenciales, donde la respuesta completa se compone de dos partes. Una de ellas depende del tipo de excitación del circuito y corresponde a la solución particular. La otra es independiente de las fuentes y excitación por lo que se denomina **respuesta natural o propia** y corresponde a la solución de la homogénea.

En circuitos pasivos que contengan resistencias la respuesta natural debe ser amortiguada ´y viene caracterizada por términos exponenciales decrecientes. Al cabo de un cierto tiempo estos términos se pueden considerar despreciables quedando como única respuesta la debida a la solución particular, en ese caso se dice que el circuito funciona en **régimen permanente.**

Mientras la respuesta natural no sea despreciable se dice que el circuito funciona en **régimen transitorio**.

Deben hacerse varias consideraciones:

Regla 1. La tensión en bornes de un condensador no puede variar bruscamente.

Si la tensión en un condensador variase bruscamente, al ser:

$$i_c = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t}$$

La intensidad seria infinita y en un sistema físico ninguna variable puede ser infinita.

Regla 2. La intensidad en bornes de una bobina no puede variar bruscamente.

Si la intensidad en una bobina variase bruscamente, al ser:

$$u_L = L \cdot \frac{\partial i_L(t)}{\partial t}$$

La tensión seria infinita y en un sistema físico ninguna variable puede ser infinita.

En teoría no existe ninguna limitación para que una fuente ideal suministre una tensión o una intensidad infinita.

Si conectamos una fuente ideal de tensión continua en paralelo con un condensador descargado (tensión inicial cero), el condensador debe cargarse en un tiempo cero a la tensión de la fuente, para lo cual debe ceder un impulso de intensidad.

Análogamente si conectamos una fuente ideal de intensidad continua en paralelo con una bobina descargada (intensidad inicial cero), la bobina debe cargarse en un tiempo cero a la intensidad de la fuente, para lo cual debe aparecer un impulso de tensión.

Circuitos RC

Se trata de observar la evolución de la tensión en un condensador durante el proceso de carga y descarga a través de una resistencia R. Es decir, en el circuito de la Figura 1, se pretende determinar la evolución de u_c, cuando el interruptor S_1 pasa alternativamente de la posición A a la posición B.

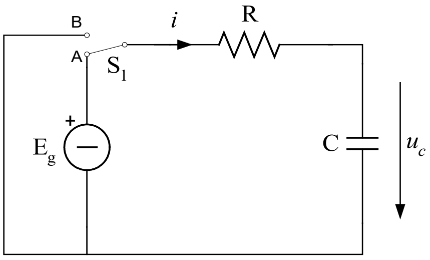

Figura 1. Carga y descarga de un condensador

Cuando el interruptor está en la posición A (carga del condensador), se tiene la Figura 2.

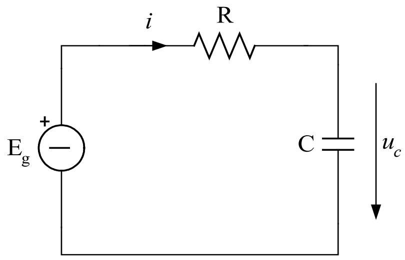

Figura 2. Circuito de carga del condensador

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de este circuito son:

$$E_g = R \cdot i(t) + u_c(t)$$

$$E_g = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + u_c(t)$$

La homogénea resulta:

$$R \cdot C \cdot \frac{\partial u_{ch}(t)}{\partial t} + u_{ch}(t) = 0$$

Despejando, se tiene (paso a paso):

$$R \cdot C \cdot \frac{\partial u_{ch}(t)}{\partial t} = -u_{ch}(t)$$

$$\frac{\partial u_{ch}(t)}{u_{ch}(t)} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \partial t$$

$$L \cdot u_{ch}(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t + L \cdot k_1$$

$$\frac{u_{ch}(t)}{k_1} = e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

$$u_{ch}(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

La particular es del tipo:

$$u_{cp}(t) = k_2$$

Con lo que se tiene (paso a paso):

$$E_g = R \cdot C \cdot 0 + k_2$$

$$k_2 = E_g$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + E_g$$

Si inicialmente el condensador está descargado $u_c(0) = 0$

$$0 = k_1 + E_g$$

$$k_1 = -E_g$$

Por lo tanto:

$$u_c(t) = E_g \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right)$$

Su representación es la dada en la Figura 3.

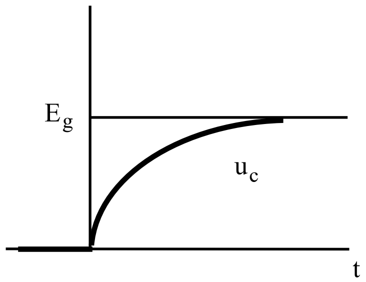

Figura 3. Representación de la variación de la tensión en la fase de carga en un circuito RC.

Si se quiere calcular la expresión de la intensidad será:

$$i = C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} = C \cdot \left(-\frac{E_g}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) = \frac{E_g}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

Y su representación está dada en la Figura 4.

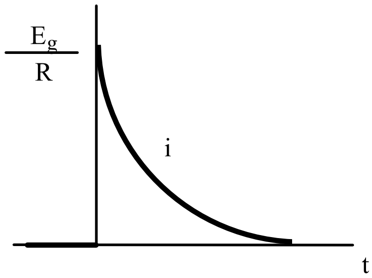

Figura 4. Representación de la variación de la intensidad en la fase de carga de un circuito RC.

Al término $R \cdot C$ se le denomina **constante de tiempo** $r = R \cdot C$ y para valores del tiempo $t = 4 \cdot \tau$ se considera que se ha llegado al <u>régimen permanente</u>.

Como se ha visto el condensador en el instante inicial $t = 0$, tenía una tensión cero, y se podría sustituir el condensador por un cortocircuito (fuente de tensión cero), entonces se tiene para $t = 0$:

$$E_g = R \cdot i(0) + 0$$

$$i(0) = \frac{E_g}{R}$$

Como se ve coincide con el valor de la intensidad en $t = 0$.

Entonces permite establecer otra regla:

<u>Regla 3.</u> Para el cálculo de los valores iníciales en un circuito, un condensador cargado se sustituye por una fuente ideal de tensión, de valor igual a su tensión inicial.

Si mientras el interruptor está en la posición A el condensador le dio tiempo a cargarse totalmente $u_c = E_g$, es decir se ha llegado al régimen permanente.

Entonces permite establecer otra regla:

<u>Regla 5.</u> En régimen permanente, en corriente continua, un condensador se comporta como un circuito abierto.

$$i_c = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = 0$$

Para este circuito se tiene que $i = 0$, como se ve:

$$E_g = R \cdot i + u_c$$

$$u_c = E_g$$

Cuando el interruptor está en la posición B (descarga del condensador), se tiene (considerando el comienzo en $t = 0$), Figura 5.

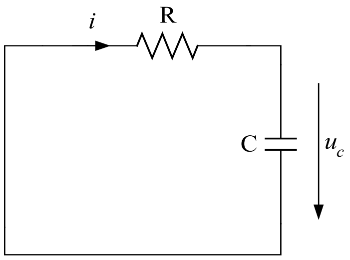

Figura 5. Circuito de descarga del condensador en un circuito RC.

El circuito se podría definir de la manera:

$$0 = R \cdot i(t) + u_c(t)$$

Despejando, se tiene:

$$0 = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + u_c(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = -u_c(t)$$

$$\frac{\partial u_c(t)}{u_c(t)} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \partial t$$

$$L \cdot u_c(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t + L \cdot k_1$$

$$\frac{u_c(t)}{k_1} = e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

$$u_c(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

Si inicialmente el condensador le dio tiempo a cargarse totalmente $u_c(0) = E_g$:

$$E_g = k_1$$

Por lo tanto:

$$u_c(t) = E_g \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

Su representación es la dada en la Figura 6.

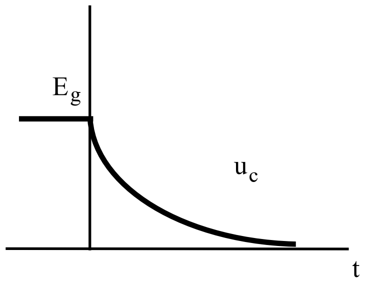

Figura 6. Representación de la variación de la tensión en la fase de descarga de un circuito RC.

Si se quiere calcular la expresión de la intensidad será:

$$i = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = C \cdot \left(-\frac{E_g}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) = -\frac{E_g}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

Y su representación está dada en la Figura 6.

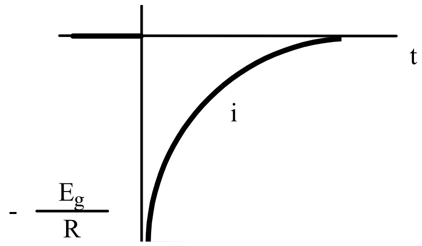

Figura 7. Representación de la variación de la intensidad en la fase de descarga de un circuito RC.

Se comprueba según regla 3, para $t = 0$, el condensador se sustituye por una fuente de tensión de valor E_g:

$$R \cdot i(0) + E_g = 0$$

$$i(0) = -\frac{E_g}{R}$$

Si mientras el interruptor está en la posición B el condensador le dio tiempo a descargarse totalmente $u_c = 0$, es decir se ha llegado al régimen permanente.

Se comprueba según regla 5, en régimen permanente, el condensador se comporta como un circuito abierto: $i = 0$.

Para este circuito se tiene que $i = 0$, como se ve:

$$R \cdot i + u_c = 0$$

$$u_c = 0$$

Circuito RL

Se trata de observar la evolución de la tensión en un condensador durante el proceso de carga y descarga a través de una resistencia R. Es decir, en el circuito de la Figura 8, se pretende determinar la evolución de i, cuando el interruptor S_1 pasa alternativamente de la posición A a la posición B.

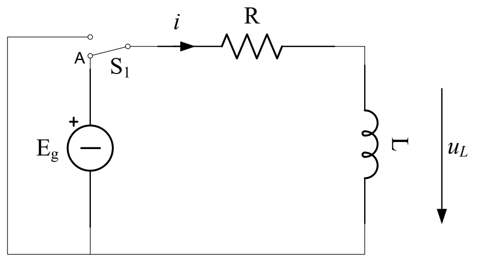

Figura 8. Carga y descarga de una bobina en un circuito RL.

Cuando el interruptor está en la posición A (carga de la bobina), se tiene el circuito de la Figura 9.

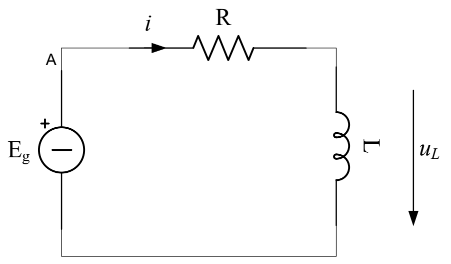

Figura 9. Circuito de carga de la bobina en un circuito RL.

La ecuación que rige el comportamiento de este circuito es:

$$E_g = R \cdot i(t) + u_L(t)$$

$$E_g = R \cdot i(t) + \frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

$$\frac{E_g}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + i(t)$$

La homogénea resulta:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial i_h(t)}{\partial t} + i_h(t) = 0$$

Operando:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial i_h(t)}{\partial t} = -i_h(t)$$

$$\frac{\partial i_h(t)}{i_h(t)} = -\frac{R}{L} \cdot \partial t$$

$$L \cdot i_h(t) = -\frac{R}{L} \cdot t + L \cdot k_1$$

$$\frac{i_h(t)}{k_1} = e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i_h(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

La particular es del tipo

$$i_p(t) = k_2$$

$$E_g = R \cdot k_2 + L \cdot 0$$

$$k_2 = \frac{E_g}{R}$$

Entonces la solución completa resulta:

$$i(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E_g}{R}$$

Si inicialmente el condensador está descargado $i(0) = 0$:

$$0 = k_1 + \frac{E_g}{R}$$

$$k_1 = -\frac{E_g}{R}$$

Por lo tanto:

$$i(t) = \frac{E_g}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

Su representación es la dada en la Figura 10.

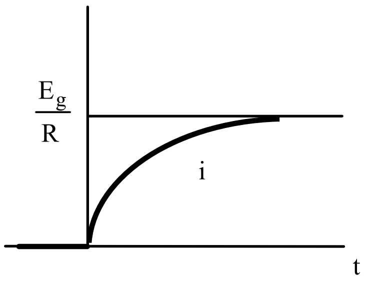

Figura 10. Variación de la intensidad en la fase de carga de un circuito RL.

Si se quiere calcular la expresión de la tensión será:

$$u_L = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} = -L \cdot \left(-\frac{E_g}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = E_g \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Su representación será la de la Figura 11.

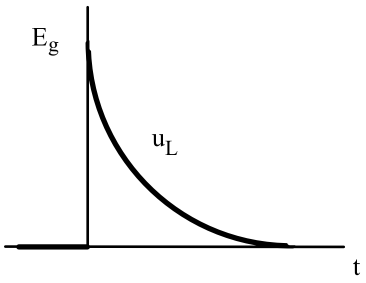

Figura 11. Variación de la tensión en la fase de carga de un circuito RL.

De forma similar al caso de circuito RC cuya **constante de tiempo** es $\tau = R \cdot C$ en el circuito RL **constante de tiempo** será $\tau = \frac{1}{R} \cdot L = \frac{L}{R}$. Se tiene para tanto para los circuitos RC y RL exponenciales:

$$e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Y para valores del tiempo $t = 4 \cdot \tau$ se considera que se ha llegado al <u>régimen permanente</u>.

Como se ha visto en la bobina en el instante inicial $t = 0$, circula una intensidad cero, y se podría sustituir la bobina por un circuito abierto (fuente de intensidad cero), entonces se tiene para t =0:

$$E_g = R \cdot 0 + u_L(0)$$

$$u_L(0) = E_g$$

Como se ve coincide con el valor de la tensión en $t = 0$.

Entonces permite establecer otra regla:

<u>*Regla 4.*</u> Para el cálculo de los valores iníciales en un circuito, una bobina cargada se sustituye por una fuente ideal de intensidad, de valor igual a la intensidad que le recorre inicialmente.

Si mientras el interruptor está en la posición A la bobina le dio tiempo a cargarse totalmente $i = \frac{E_g}{R}$, es decir se ha llegado al régimen permanente.

Entonces permite establecer otra regla:

<u>Regla 6.</u> En régimen permanente, en corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito.

$$u_L = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} = 0$$

Para este circuito se tiene que $u_L = 0$ como se ve:

$$E_g = R \cdot i + u_L$$

$$i = \frac{E_g}{R}$$

Cuando el interruptor está en la posición B (descarga de la bobina), se tiene (considerando el comienzo en $t = 0$) la Figura 12.

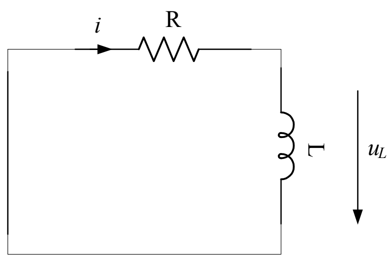

Figura 12. Circuito de descarga de la bobina.

Las ecuaciones que rigen su comportamiento son:

$$0 = R \cdot i(t) + u_L(t)$$

$$0 = R \cdot i(t) + \frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

$$0 = \frac{L}{R} \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + i(t)$$

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} = -i(t)$$

$$\frac{\partial i(t)}{\partial t} = -\frac{R}{L} \cdot i(t)$$

$$L \cdot i(t) = -\frac{R}{L} \cdot t + L \cdot k_1$$

$$\frac{i(t)}{k_1} = e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Si inicialmente a la bobina le dio tiempo a cargarse totalmente $i(0) = \frac{E_g}{R}$

$$\frac{E_g}{R} = k_1$$

Por lo tanto:

$$i(t) = \frac{E_g}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Su representación es la dada en la Figura 13.

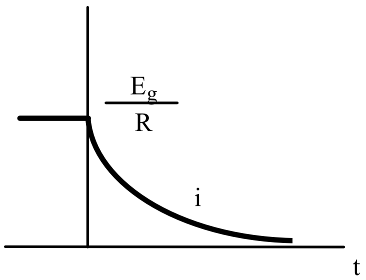

Figura 13. Variación de la intensidad en la fase de descarga de un circuito RL.

Si se quiere calcular la expresión de la tensión será:

$$u_L = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} = L \cdot \left(-\frac{E_g}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) = -E_g \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

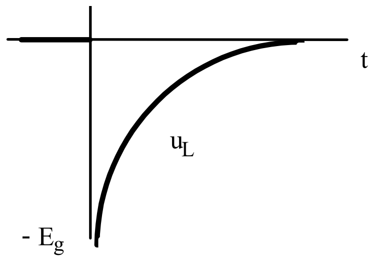

Figura 14. Variación de la tensión en la fase de descarga de un circuito RL.

Se comprueba según regla 4, para $t = 0$, la bobina se sustituye por una fuente de intensidad de valor $\frac{E_g}{R}$.

$$R \cdot \frac{E_g}{R} + u_L(0) = 0$$

$$u_L(0) = -E_g$$

Si mientras el interruptor está en la posición B el condensador le dio tiempo a descargarse totalmente $i = 0$, es decir se ha llegado al régimen permanente.

Se comprueba según regla 6, en régimen permanente, la bobina comporta como un cortocircuito: $u_L = 0$.

Para este circuito se tiene que $u_L = 0$, como se ve:

$$R \cdot i + u_L = 0$$

$$i = 0$$

Circuito RLC

Se trata de observar la evolución de la tensión en un condensador y en la intensidad del circuito de la Figura 15.

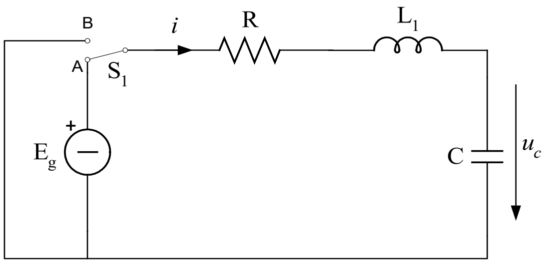

Figura 15. Circuito con bobina y condensador.

Cuando el interruptor está en la posición A, se tiene el circuito de la Figura 2.

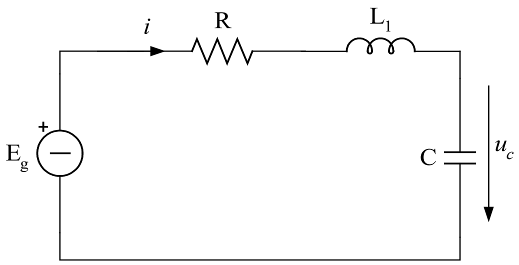

Figura 16. Circuito RLC en fase de carga.

La ecuación que rige el comportamiento de este circuito es:

$$E_g = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + u_c(t)$$

Operando, se tiene:

$$E_g = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_c(t)}{\partial t^2} + u_c(t)$$

$$\frac{E_g}{L \cdot C} = \frac{\partial^2 u_c(t)}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_c(t)$$

Definiendo:

<u>Coeficiente de amortiguamiento:</u>

$$\alpha = \frac{\mathrm{R}}{2 \cdot \mathrm{L}}$$

<u>Pulsación de resonancia:</u>

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

La homogénea resulta:

$$\frac{\partial^2 u_{ch}(t)}{\partial t^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial u_{ch}(t)}{\partial t} + {\omega_0}^2 \cdot u_{ch}(t) = 0$$

Lo que es lo mismo:

$$s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + {\omega_0}^2 = 0$$

Sacando las raíces:

$$s = \frac{-2 \cdot \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}}{2}$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$$

La particular es del tipo:

$$u_{cp}(t) = k$$

$$\frac{E_g}{L \cdot C} = 0 + \frac{R}{L} \cdot 0 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot k$$

$$k = E_g$$

Si inicialmente el condensador está descargado $u_c(0) = 0$ y $i(0) = i_L(0) = 0$:

$$u_c(0) = 0$$

$$C \cdot \left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = i(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Según los valores de α y ω_0 se tiene:

Circuito sobreamortiguado

Se da en el caso de que $\alpha > \omega_0$:

$$u_{ch}(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + E_g$$

Los valores de s_1 y s_2 son negativos.

Se tiene que $u_c(0) = 0$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = k_1 \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot s_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Entonces los valores de k_1 y k_2 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + E_g &= u_c(0) \\ k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2 &= \left(\frac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + E_g &= 0 \\ k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = k_1 \cdot C \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot C \cdot s_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Circuito amortiguado críticamente

Se da si $\alpha = \omega_0$ y se puede definir como:

$$u_{ch}(t) = (k_1 + k_1 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = (k_1 + k_1 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + E_g$$

Se tiene que $u_c(0) = 0$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = k_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot (k_1 + k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Entonces los valores de k_1 y k_2 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{aligned} k_1 + E_g &= u_c(0) \\ k_2 - \alpha \cdot k_1 &= \left(\frac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + E_g &= 0 \\ k_2 - \alpha \cdot k_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = C \cdot (k_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot (k_1 + k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t})$$

$$i(t) = C \cdot (k_2 - \alpha \cdot k_1 - \alpha \cdot k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Circuito subamortiguado

Se da cuando $\alpha < \omega_0$. Se trata de una solución compleja:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$$

$$s = -\alpha \pm j \cdot \omega_a$$

donde $\omega_a = \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$

$$u_{ch}(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right)$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + E_g$$

Se tiene que $u_c(0) = 0$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)$$

Entonces los valores de k_1 y k_1 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{array}{c} k_1 + E_g = u_c(0) \\ -\alpha \cdot k_1 + k_2 \cdot \omega_a = \left(\frac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} k_1 + E_g = 0 \\ -\alpha \cdot k_1 + k_2 \cdot \omega_a = 0 \end{array}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} = C \cdot \left[-\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)\right]$$

$$i(t) = C \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha \cdot t}\left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + C \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)$$

$$i(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot C \cdot \left((k_2 \cdot \omega_a - k_1 \cdot \alpha) \cdot cos(\omega_a \cdot t) - (k_1 \cdot \omega_a - k_2 \cdot \alpha) \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right)$$

Cuando el interruptor está en la posición B, se tiene (considerando el comienzo en $t = 0$) la Figura 17.

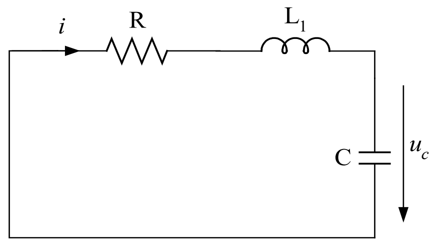

Figura 17. Circuito RLC en fase de descarga.

$$0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + u_c(t)$$

Operando, se tiene:

$$0 = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_c(t)}{\partial t^2} + u_c(t)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u_c(t)}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_c(t)$$

Definiendo:

<u>Coeficiente de amortiguamiento:</u>

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L}$$

<u>Pulsación de resonancia:</u>

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u_c(t)}{\partial t^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial u_{ch}(t)}{\partial t} + {\omega_0}^2 \cdot u_c(t) = 0$$

Lo que es lo mismo:

$$s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + {\omega_0}^2 = 0$$

Sacando las raíces:

$$s = \frac{-2 \cdot \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}}{2}$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$$

Si inicialmente se ha llegado al régimen permanente:

La tensión en el condensador resulta:

$$u_c(0) = E_g$$

En cuanto a la intensidad en la bobina:

$$i(0) = i_L(0) = 0$$

Entonces:

$$C \cdot \left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = i(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Según los valores de α y ω_0 se tiene:

Circuito sobreamortiguado

Se da en el caso de que $\alpha > \omega_0$:

$$u_c(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + E_g$$

Los valores de s_1 y s_2 son negativos.

Se tiene que $u_c(0) = E_g$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = k_1 \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot s_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Entonces los valores de k_1 y k_2 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{array}{r} k_1 + k_2 = u_c(0) \\ k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2 = \left(\frac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 + k_2 = E_g \\ k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = k_1 \cdot C \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot C \cdot s_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Circuito amortiguado críticamente

Se da si $\alpha = \omega_0$ y se puede definir como:

$$u_c(t) = (k_1 + k_1 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Se tiene que $u_c(0) = E_g$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = k_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot (k_1 + k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Entonces los valores de k_1 y k_2 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{array}{r} k_1 = u_c(0) \\ k_2 - \alpha \cdot k_1 = \left(\dfrac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 = E_g \\ k_2 - \alpha \cdot k_1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c(t)}{\partial t} = C \cdot (k_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot (k_1 + k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t})$$

$$i(t) = C \cdot (k_2 - \alpha \cdot k_1 - \alpha \cdot k_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Circuito subamortiguado

Se da cuando $\alpha < \omega_0$. Se trata de una solución compleja:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$$

$$s = -\alpha \pm j \cdot \omega_a$$

donde $\omega_a = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$

$$u_c(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right)$$

Entonces la solución completa resulta:

$$u_c(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + E_g$$

Se tiene que $u_c(0) = E_g$ y $\left(\frac{\partial u_c}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)$$

Entonces los valores de k_1 y k_1 se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{array}{r} k_1 = u_c(0) \\ -\alpha \cdot k_1 + k_2 \cdot \omega_a = \left(\dfrac{\partial u_c(t)}{\partial t}\right)_{t=0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 = E_g \\ -\alpha \cdot k_1 + k_2 \cdot \omega_a = 0 \end{array}\right\} \rightarrow k_1, k_2$$

En cuanto a la intensidad resultará:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} = C \cdot \left[-\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)\right]$$

$$i(t) = C \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha \cdot t}\left(k_1 \cdot cos(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right) + C \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(-k_1 \cdot \omega_a \cdot sen(\omega_a \cdot t) + k_2 \cdot \omega_a \cdot cos(\omega_a \cdot t)\right)$$

$$i(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot C \cdot \left((k_2 \cdot \omega_a - k_1 \cdot \alpha) \cdot cos(\omega_a \cdot t) - (k_1 \cdot \omega_a - k_2 \cdot \alpha) \cdot sen(\omega_a \cdot t)\right)$$